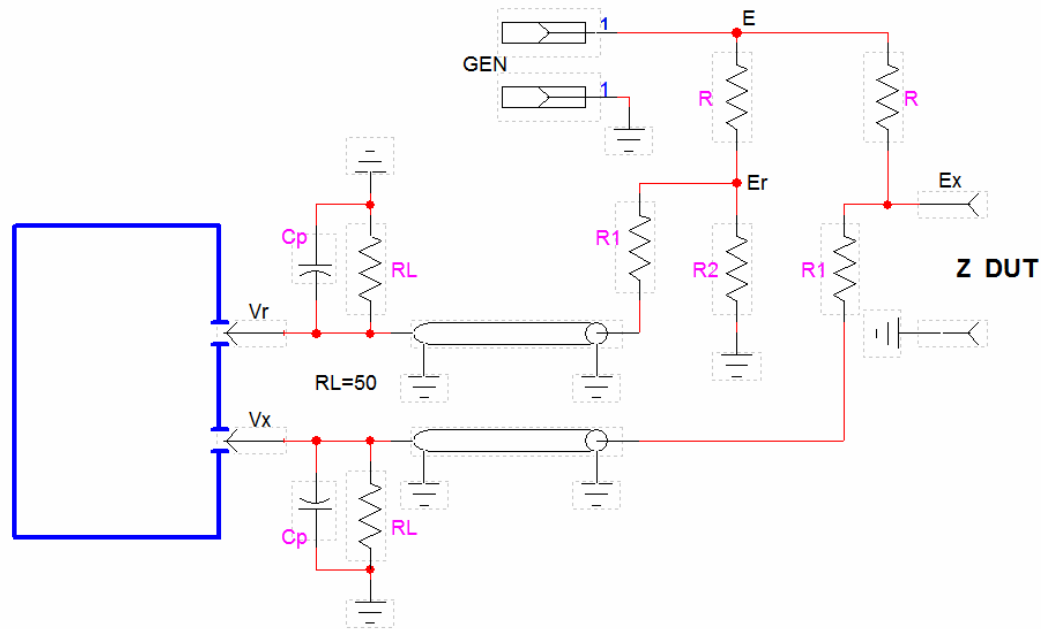


Resistive Impedance Bridge Calculations

J. Audet VE2AZX ve2azx.net
Version 2 July 2016

Ref :
<https://www.youtube.com/watch?v=eYN7dhdt1Dw>



NOTE: Cp is neglected initially

Bridge Left side

$$\frac{R2 \cdot (R1 + RL)}{R2 + R1 + RL} \quad \text{Equiv } R2 \parallel R1 + RL$$

$$E_r = \frac{E \cdot \left[\frac{R2 \cdot (R1 + RL)}{R2 + R1 + RL} \right]}{\frac{R2 \cdot (R1 + RL)}{R2 + R1 + RL} + R} \quad (1)$$

Bridge Right Side:

$$\frac{Z \cdot (R1 + RL)}{Z + R1 + RL} \quad \text{Equiv } Z \parallel R1 + RL$$

$$E_x = \frac{E \cdot \frac{Z \cdot (R1 + RL)}{Z + R1 + RL}}{\frac{Z \cdot (R1 + RL)}{Z + R1 + RL} + R} \quad (5)$$

Simplify :

$$E_r = \frac{E \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L)}{R \cdot R_1 + R \cdot R_2 + R \cdot R_L + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_L}$$

$$E_r = \frac{E \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L)}{R \cdot (R_1 + R_2 + R_L) + R_2 \cdot (R_1 + R_L)} \quad (2)$$

$$E_{Vr} = \frac{E_r \cdot R_L}{R_1 + R_L} \quad (3)$$

After eq 2 into eq 3

$$E_{Vr} = \frac{E \cdot R_2 \cdot R_L}{R \cdot R_1 + R \cdot R_2 + R \cdot R_L + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_L} \quad (4)$$

$$K = \frac{E_{Vx}}{E_{Vr}} \quad \text{Ratio of voltages (complex)}$$

$$K = \frac{\frac{E \cdot R_L \cdot Z}{R \cdot R_1 + R \cdot R_L + R \cdot Z + R_1 \cdot Z + R_L \cdot Z}}{\frac{E \cdot R_2 \cdot R_L}{R \cdot R_1 + R \cdot R_2 + R \cdot R_L + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_L}} \quad \text{Using eq 4 and 8}$$

Simplify :

$$K = \frac{Z \cdot (R \cdot R_1 + R \cdot R_2 + R \cdot R_L + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_L)}{R_2 \cdot (R \cdot R_1 + R \cdot R_L + R \cdot Z + R_1 \cdot Z + R_L \cdot Z)} \quad (9)$$

Solving for Z. K is complex: it has an angle

$$Z = \frac{K \cdot R \cdot R_1 \cdot R_2 + K \cdot R \cdot R_2 \cdot R_L}{R \cdot R_1 + R \cdot R_2 + R \cdot R_L + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_L - K \cdot R \cdot R_2 - K \cdot R_1 \cdot R_2 - K \cdot R_2 \cdot R_L}$$

$$Z = \frac{K \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L)}{R \cdot (R_1 + R_2 + R_L) + R_2 \cdot (R_1 + R_L) - K \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_L)} \quad (10)$$

Simplify :

$$E_x = \frac{E \cdot Z \cdot (R_1 + R_L)}{R \cdot R_1 + R \cdot R_L + R \cdot Z + R_1 \cdot Z + R_L \cdot Z}$$

$$E_x = \frac{E \cdot Z \cdot (R_1 + R_L)}{R \cdot (R_1 + R_L + Z) + Z \cdot (R_1 + R_L)} \quad (6)$$

$$E_{Vx} = \frac{E_x \cdot R_L}{R_1 + R_L} \quad (7)$$

After eq 6 into eq 7

$$E_{Vx} = \frac{E \cdot R_L \cdot Z}{R \cdot R_1 + R \cdot R_L + R \cdot Z + R_1 \cdot Z + R_L \cdot Z} \quad (8)$$

$$\text{Phase} = \frac{\text{delay} \cdot 360}{\text{Period}} = \text{delay} \cdot \text{Freq} \cdot 360$$

Calculate phase in degrees from delay

$$K_{re} = K_m \cdot \cos\left(\text{Phase} \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

K_{re} = Re part of K

K_m = abs(K), the measured voltage ratio

$$K_{im} = K_m \cdot \sin\left(\text{Phase} \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

K_{im} = Im part of K

$$K = K_{re} + j \cdot K_{im} \quad (11)$$

$$Z = \frac{K \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L)}{R \cdot (R_1 + R_2 + R_L) + R_2 \cdot (R_1 + R_L) - K \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_L)} \quad (10) \text{repeated}$$

Substitute K complex, eq 11 into eq 10

(12)

$$Z = \frac{R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L) \cdot (K_{re} + K_{im} \cdot i)}{K_{re} \cdot R \cdot R_2 - R \cdot R_2 - R \cdot R_L - R_1 \cdot R_2 - R_2 \cdot R_L - R \cdot R_1 + K_{re} \cdot R_1 \cdot R_2 + K_{re} \cdot R_2 \cdot R_L + K_{im} \cdot R \cdot R_2 \cdot i + K_{im} \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot i + K_{im} \cdot R_2 \cdot R_L \cdot i}$$

Factoring, grouping Re and Im terms and changing input - sign:

$$Z = \frac{K_{re} \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L) + i \cdot K_{im} \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L)}{R_2 \cdot (R_1 + R_L + R - K_{re} \cdot R_L) - K_{re} \cdot R_2 \cdot (R + R_1) + R \cdot (R_L + R_1) - i \cdot K_{im} \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_L)} \quad (13)$$

Possible factoring of the numerator:

$$K_{re} \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L) + i \cdot K_{im} \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L)$$

$$R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L) \cdot (K_{re} + i \cdot K_{im})$$

$$R := 200$$

$$R_1 := 300$$

$$R_L := 50$$

K_m = abs(K), the measured voltage ratio

$$R_2 := 50$$

$$\text{delay} := 2 \text{ ns}$$

$$\text{Freq} := 18$$

$$\text{MHz}$$

$$K_m := \frac{27.8}{32}$$

$$\text{Phase} := \frac{\text{delay} \cdot \text{Freq} \cdot 360}{1000}$$

Note: delay is in nSec

Freq in MHz

Phase in

degrees

Real part of K_m

Imag. part of K_m

$$\text{Phase} = 12.96$$

$$K_m = 0.869$$

$$K_{re} = 0.847$$

$$K_{im} = 0.195$$

$$K_{re} := K_m \cdot \cos\left(\text{Phase} \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$$K_{im} := K_m \cdot \sin\left(\text{Phase} \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$$Z := \frac{Kre \cdot R \cdot R2 \cdot (R1 + RL) + i \cdot Kim \cdot R \cdot R2 \cdot (R1 + RL)}{R2 \cdot (R1 + RL + R - Kre \cdot RL) - Kre \cdot R2 \cdot (R + R1) + R \cdot (RL + R1) - i \cdot Kim \cdot R2 \cdot (R + R1 + RL)}$$

$$Z = 39.058 + 12.008i$$

$$A := \text{Re}(Z) \quad A = 39.058 \quad Z_0 := 50$$

$$B := \text{Im}(Z) \quad B = 12.008$$

$$\text{Rho} := \left| \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \right| \quad \text{Rho} = 0.181$$

$$\text{Rho1} := \sqrt{\frac{(A - Z_0)^2 + B^2}{(A + Z_0)^2 + B^2}} \quad \text{Rho1} = 0.181$$

Attenuation Ratio A_r , ratio of ref voltage to input voltage E :

$$\frac{EV_r}{E} = \frac{R2 \cdot RL}{R \cdot R1 + R \cdot R2 + R \cdot RL + R1 \cdot R2 + R2 \cdot RL} \quad (4)$$

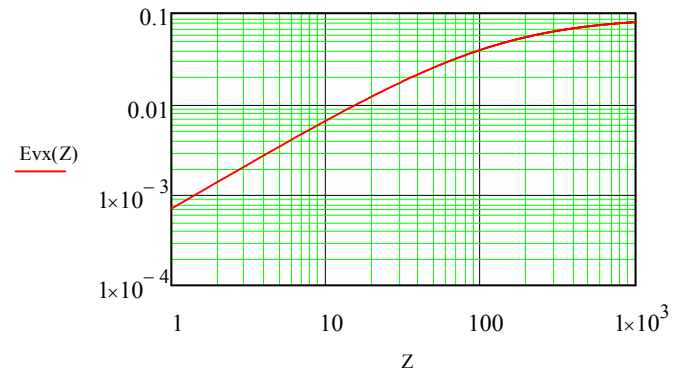
$$A_r := \frac{R2 \cdot RL}{R \cdot R1 + R \cdot R2 + R \cdot RL + R1 \cdot R2 + R2 \cdot RL} \quad A_r = 0.026$$

$$\begin{array}{llll} R := 1000 & R1 := 2000 & R2 := 500 & RL := 1000000 \\ R := 200 & R1 := 300 & R2 := 50 & RL := 50 \end{array}$$

$$A_r := \frac{R2 \cdot RL}{R \cdot R1 + R \cdot R2 + R \cdot RL + R1 \cdot R2 + R2 \cdot RL} \quad A_r = 0.026$$

Ratio Ev_x / E : $Z := 1, 2 \dots 1000$

$$Ev_x(Z) := \frac{RL \cdot Z}{R \cdot R1 + R \cdot RL + R \cdot Z + R1 \cdot Z + RL \cdot Z}$$

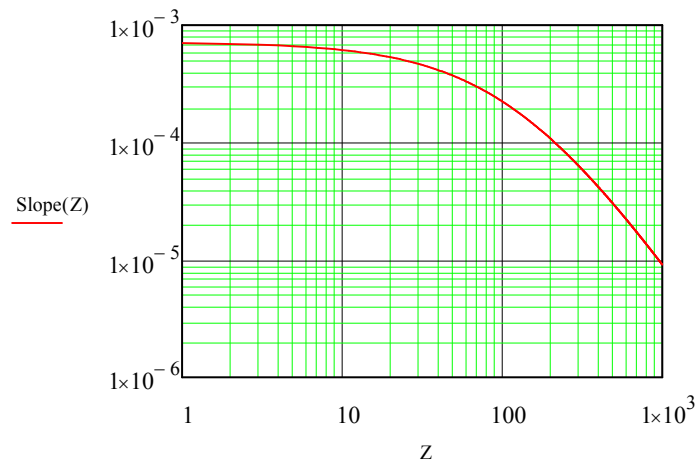


Evx / E voltage ratio

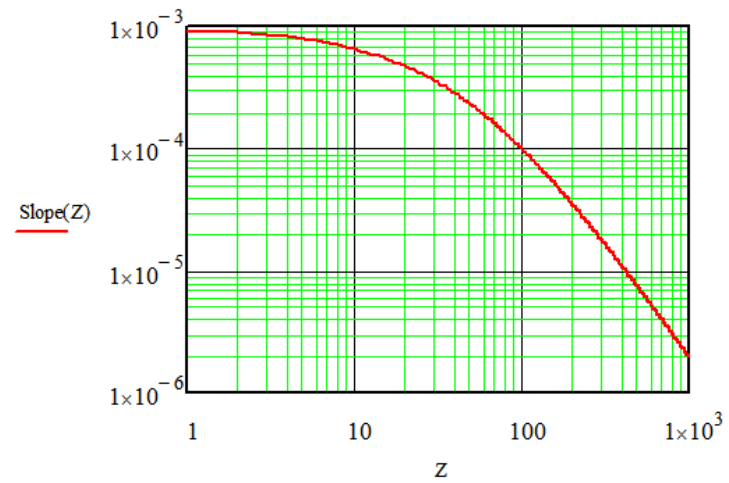
Note that Evx slope decreases above Z= 200 ohms

$$E_{vx}(Z) := \frac{RL \cdot Z}{R \cdot R1 + R \cdot RL + R \cdot Z + R1 \cdot Z + RL \cdot Z}$$

$$\text{Slope}(Z) := \frac{d}{dZ} \left(\frac{RL \cdot Z}{R \cdot R1 + R \cdot RL + R \cdot Z + R1 \cdot Z + RL \cdot Z} \right)$$



Improved bridge R=200, R1=300, R2=50, RL=50
Slope decreases by a factor of 10 at Z=300



Standard 50 ohm bridge
Slope decreases by a factor of 10 at Z=110

Calculations with RL complex, takes into account the shunt capacitance across RL

$$Z = \frac{K_{re} \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L) + i \cdot K_{im} \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L)}{R_2 \cdot (R_1 + R_L + R - K_{re} \cdot R_L) - K_{re} \cdot R_2 \cdot (R + R_1) + R \cdot (R_L + R_1) - i \cdot K_{im} \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_L)} \quad (13)$$

$$R_L = R_s + i \cdot X \quad \text{Impedance of RL, with } C_p \text{ in parallel} \quad (14)$$

$$Z = \frac{K_{re} \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L) + i \cdot K_{im} \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_L)}{R_2 \cdot (R_1 + R_L + R - K_{re} \cdot R_L) - K_{re} \cdot R_2 \cdot (R + R_1) + R \cdot (R_L + R_1) - i \cdot K_{im} \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_L)} \quad (13)$$

Sub 14 into 13:

$$Z = \frac{R \cdot R_2 \cdot (K_{re} + K_{im} \cdot i) \cdot (R_1 + R_s + X \cdot i)}{R \cdot R_1 + R \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2 + R \cdot R_s + R_2 \cdot R_s - K_{re} \cdot R \cdot R_2 - K_{re} \cdot R_1 \cdot R_2 - K_{re} \cdot R_2 \cdot R_s + K_{im} \cdot R_2 \cdot X - K_{im} \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot i - K_{re} \cdot R_2 \cdot X \cdot i - K_{im} \cdot R_2 \cdot R_s \cdot i - K_{im} \cdot R \cdot R_2 \cdot i + R \cdot X \cdot i + R_2 \cdot X \cdot i} \quad (15)$$

$$\text{Numerator :} \quad R \cdot R_2 \cdot (K_{re} + K_{im} \cdot i) \cdot (R_1 + R_s + X \cdot i)$$

$$\text{Grouping Re Im terms:} \quad K_{re} \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_s) - K_{im} \cdot R \cdot R_2 \cdot X + [K_{re} \cdot R \cdot R_2 \cdot X + K_{im} \cdot R \cdot R_2 \cdot (R_1 + R_s)] \cdot i$$

$$R \cdot R_2 \cdot [K_{re} \cdot (R_1 + R_s) - K_{im} \cdot X] + i \cdot R \cdot R_2 \cdot [K_{re} \cdot X + K_{im} \cdot (R_1 + R_s)]$$

Denominator :

$$R \cdot R_1 + R \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2 + R \cdot R_s + R_2 \cdot R_s - K_{re} \cdot R \cdot R_2 - K_{re} \cdot R_1 \cdot R_2 - K_{re} \cdot R_2 \cdot R_s + K_{im} \cdot R_2 \cdot X - K_{im} \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot i - K_{re} \cdot R_2 \cdot X \cdot i - K_{im} \cdot R_2 \cdot R_s \cdot i - K_{im} \cdot R \cdot R_2 \cdot i + R \cdot X \cdot i + R_2 \cdot X \cdot i$$

Grouping Re Im terms:

$$R \cdot R_1 + R \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2 + R \cdot R_s + R_2 \cdot R_s - K_{re} \cdot R \cdot R_2 - K_{re} \cdot R_1 \cdot R_2 - K_{re} \cdot R_2 \cdot R_s + K_{im} \cdot R_2 \cdot X + (R \cdot X + R_2 \cdot X - K_{im} \cdot R \cdot R_2 - K_{im} \cdot R_1 \cdot R_2 - K_{im} \cdot R_2 \cdot R_s - K_{re} \cdot R_2 \cdot X) \cdot i$$

$$R \cdot (R_1 + R_2 + R_s) + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_s - K_{re} \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_s) + K_{im} \cdot R_2 \cdot X - i \cdot [K_{re} \cdot R_2 \cdot X + K_{im} \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_s) - X \cdot (R + R_2)]$$

$$\text{Factoring Im part:} \quad R \cdot X + R_2 \cdot X - K_{im} \cdot R \cdot R_2 - K_{im} \cdot R_1 \cdot R_2 - K_{im} \cdot R_2 \cdot R_s - K_{re} \cdot R_2 \cdot X$$

$$-(K_{im} \cdot R_2) \cdot (R + R_1 + R_s) - K_{re} \cdot R_2 \cdot X + X \cdot (R + R_2)$$

$$i \cdot [-(K_{im} \cdot R_2) \cdot (R + R_1 + R_s) - K_{re} \cdot R_2 \cdot X + X \cdot (R + R_2)]$$

$$i \cdot [-(K_{im} \cdot R_2) \cdot (R + R_1 + R_s) - K_{re} \cdot R_2 \cdot X + X \cdot (R + R_2)]$$

$$-K_{re} \cdot R_2 \cdot X \cdot i - K_{im} \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_s) \cdot i + X \cdot (R + R_2) \cdot i$$

$$-i \cdot [K_{re} \cdot R_2 \cdot X + K_{im} \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_s) - X \cdot (R + R_2)]$$

$$Z = \frac{R \cdot R2 \cdot [Kre \cdot (R1 + Rs) - Kim \cdot X] + i \cdot R \cdot R2 \cdot [Kre \cdot X + Kim \cdot (R1 + Rs)]}{R \cdot (R1 + R2 + Rs) + R1 \cdot R2 + R2 \cdot Rs - Kre \cdot R2 \cdot (R + R1 + Rs) + Kim \cdot R2 \cdot X - i \cdot [Kre \cdot R2 \cdot X + Kim \cdot R2 \cdot (R + R1 + Rs) - X \cdot (R + R2)]} \quad (16)$$

$$X := -10 \quad Rs := 48$$

$$Z := \frac{R \cdot R2 \cdot [Kre \cdot (R1 + Rs) - Kim \cdot X] + i \cdot R \cdot R2 \cdot [Kre \cdot X + Kim \cdot (R1 + Rs)]}{R \cdot (R1 + R2 + Rs) + R1 \cdot R2 + R2 \cdot Rs - Kre \cdot R2 \cdot (R + R1 + Rs) + Kim \cdot R2 \cdot X - i \cdot [Kre \cdot R2 \cdot X + Kim \cdot R2 \cdot (R + R1 + Rs) - X \cdot (R + R2)]} \quad Z = 39.033 + 11.977i$$

Derive Rs and X values from Rp and Cp in parallel. Cp in pF

$$Z = \frac{Rp \cdot \frac{-i \cdot 10^6}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot Cp}}{Rp + \frac{-i \cdot 10^6}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot Cp}}$$

$$Z = \frac{500000i \cdot Rp}{\pi \cdot Cp \cdot Rp \cdot f - 500000i} \quad Z = \frac{500000i \cdot Rp \cdot (-i \cdot 50000 - \pi \cdot Cp \cdot Rp \cdot f)}{(500000 \cdot i - \pi \cdot Cp \cdot Rp \cdot f) \cdot (-i \cdot 50000 - \pi \cdot Cp \cdot Rp \cdot f)}$$

$$Z = \frac{250000000000 \cdot Rp - 500000 \cdot \pi \cdot Cp \cdot Rp^2 \cdot f \cdot i}{(\pi \cdot Cp \cdot Rp \cdot f + 500000i) \cdot (\pi \cdot Cp \cdot Rp \cdot f - 500000i)}$$

$$Z = \frac{250000000000 \cdot Rp - 500000 \cdot \pi \cdot Cp \cdot Rp^2 \cdot f \cdot i}{\pi^2 \cdot Cp^2 \cdot Rp^2 \cdot f^2 + 250000000000}$$

$$Z = \frac{2.5 \cdot 10^{11} \cdot Rp - 5 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot Cp \cdot Rp^2 \cdot f \cdot i}{\pi^2 \cdot Cp^2 \cdot Rp^2 \cdot f^2 + 2.5 \cdot 10^{11}}$$

$$R_p := 50$$

$$C_p := 20$$

$$f := \text{Freq}$$

$$f = 18$$

$$R = 200$$

$$R_1 = 300$$

$$R_2 = 50$$

$$R_L = 50$$

$$Z := \frac{2.5 \cdot 10^{11} \cdot R_p - 5 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot C_p \cdot R_p^2 \cdot f \cdot i}{\pi^2 \cdot C_p^2 \cdot R_p^2 \cdot f^2 + 2.5 \cdot 10^{11}} \quad Z = 49.369 - 5.583i$$

Find R_s and X from R_p and C_p in pF:

$$R_s := \frac{2.5 \cdot 10^{11} \cdot R_p}{\pi^2 \cdot C_p^2 \cdot R_p^2 \cdot f^2 + 2.5 \cdot 10^{11}} \quad R_s = 49.369$$

$$X := \frac{-5 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot C_p \cdot R_p^2 \cdot f}{\pi^2 \cdot C_p^2 \cdot R_p^2 \cdot f^2 + 2.5 \cdot 10^{11}} \quad X = -5.583$$

Compute Z :

$$Z := \frac{R \cdot R_2 \cdot [K_{re} \cdot (R_1 + R_s) - K_{im} \cdot X] + i \cdot R \cdot R_2 \cdot [K_{re} \cdot X + K_{im} \cdot (R_1 + R_s)]}{R \cdot (R_1 + R_2 + R_s) + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_s - K_{re} \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_s) + K_{im} \cdot R_2 \cdot X - i \cdot [K_{re} \cdot R_2 \cdot X + K_{im} \cdot R_2 \cdot (R + R_1 + R_s) - X \cdot (R + R_2)]} \quad (16)$$

$$Z = 39.045 + 11.99i$$