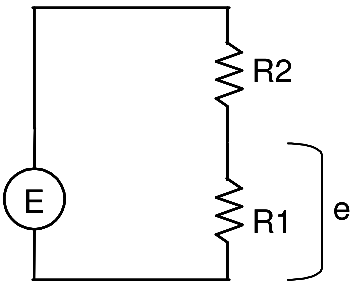
EXEMPLES

D'UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES EN ÉLECTRONIQUE

Jacques Audet
Août 2024

Calcul d'un diviseur de tension:



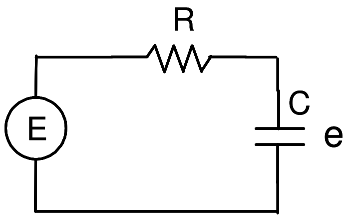
$$e = E \cdot \frac{R1}{R1 + R2}$$

Donc le rapport des tensions (K) entre la sortie et l'entrée:

$$\frac{e}{E} = \frac{R1}{R1 + R2} = K$$

Cette relation s'applique aussi lorsque les résistances sont des impédances:
Z = R +/- j X

$$j^2 = i^2 = -1$$



FILTRE PASSE BAS

Réactance XC d'un condensateur

$$XC = \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{-j}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

XC est négatif

$$\frac{e}{E} = K = \frac{\dfrac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}}{R + \dfrac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}}$$

$$\boxed{K = \frac{i}{i - 2 \cdot \pi \cdot C \cdot R \cdot f}}$$

Fonction de transfert

Fréquence pour: $|Xc| = R$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = R$$

$$\boxed{fc = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}}$$

Fréquence de coupure -3 dB

$$K(f) = \frac{i}{i - 2 \cdot \pi \cdot C \cdot R \cdot \dfrac{1}{(2 \cdot \pi \cdot R \cdot C)}} \qquad K(f) = \frac{i}{i - 1} \qquad K(f) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i$$

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i \right| = 0.707$$ Module

$$\frac{180}{\pi} \cdot \arg\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i\right) = -45$$ Degrés

$$20 \cdot \log\left(\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i \right|\right) = -3.01$$ dB à la fréquence de coupure

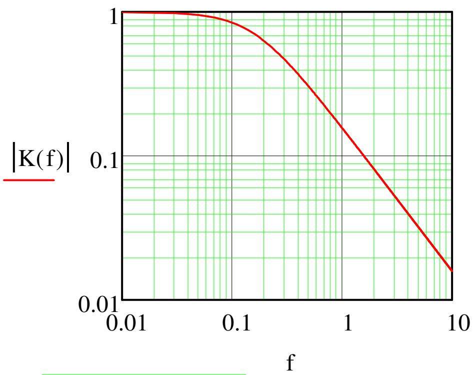
$R := 1$ $\qquad C := 1$ $\qquad Fc := \dfrac{1}{(2 \cdot \pi \cdot R \cdot C)} = 0.159$ Fréquence de coupure -3 dB

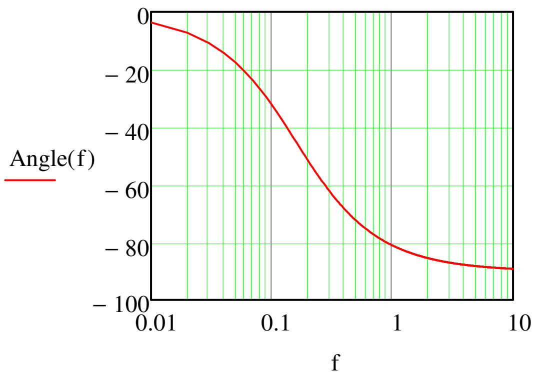
$$\boxed{K(f) := \frac{i}{i - 2 \cdot \pi \cdot C \cdot R \cdot f}} \qquad \boxed{Angle(f) := \frac{180}{\pi} \cdot \arg(K(f))} \qquad Angle(Fc) = -45$$

-45 degrés à la freq. de coupure

$f := 0.01, 0.02 .. 10$

Réponse en fréquence et angle





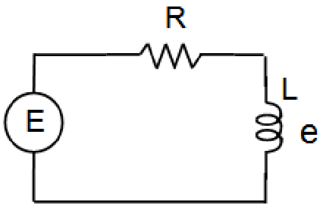
PENTES de K(f)

Pour 1 octave:

$F1 := 20 \qquad F2 := 2 \cdot F1 \qquad 20 \cdot \log(|K(F2)|) - 20 \cdot \log(|K(F1)|) = -6.02$ dB / octave

Pour 1 décade:

$F2 := 10 \cdot F1 \qquad 20 \cdot \log(|K(F2)|) - 20 \cdot \log(|K(F1)|) = -20$ dB / décade



FILTRE PASSE HAUT

Réactance XL de l'inductance:

$XL = i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L$ XL est positif

$$\frac{e}{E} = K = \frac{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L}{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L + R} \qquad K = \frac{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L}{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L + R}$$

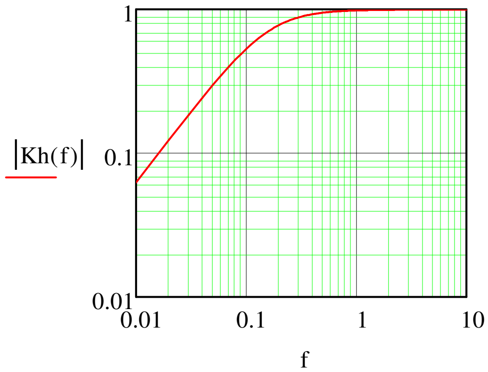
Fréquence pour: $|XL| = R$ $\quad 2\cdot\pi\cdot f\cdot L = R$ $\quad fc = \dfrac{R}{2\cdot\pi\cdot L}$ Fréquence de coupure

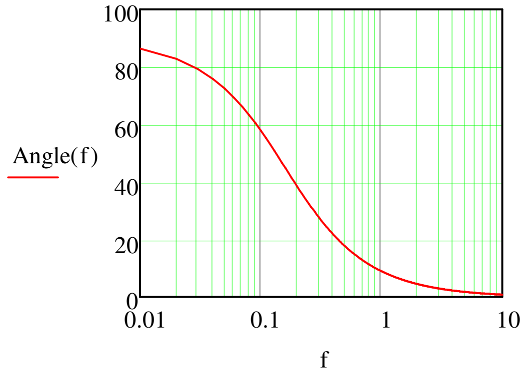
Avec f = fc:

$K = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i$ $\quad \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i\right| = 0.707$ Module $\quad \frac{180}{\pi}\cdot\arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i\right) = 45$

$L := 1$ $\quad R := 1$ $\quad$ +45 degrés à la freq. de coupure

$$Kh(f) := \frac{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L}{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L + R} \qquad Angle(f) := \frac{180}{\pi}\cdot\arg(Kh(f))$$





PENTES de Kh(f)

Pour 1 octave:

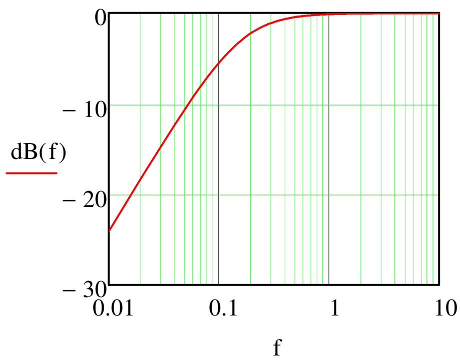
$F1 := 0.0001$ $\quad F2 := 2\cdot F1$ $\quad 20\cdot\log(|Kh(F2)|) - 20\cdot\log(|Kh(F1)|) = 6.021$ dB / octave

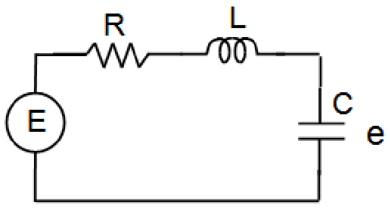
Pour 1 décade:

$F2 := 10\cdot F1$ $\quad 20\cdot\log(|Kh(F2)|) - 20\cdot\log(|Kh(F1)|) = 20$ dB / décade

RÉPONSE en dB

$dB(f) := 20\cdot\log(|Kh(f)|)$





FILTRE PASSE-BAS / PASSE-BANDE

$$\frac{e}{E} = K = \frac{\frac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot C}}{\frac{1}{j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot C} + j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L + R}$$

Simplifications

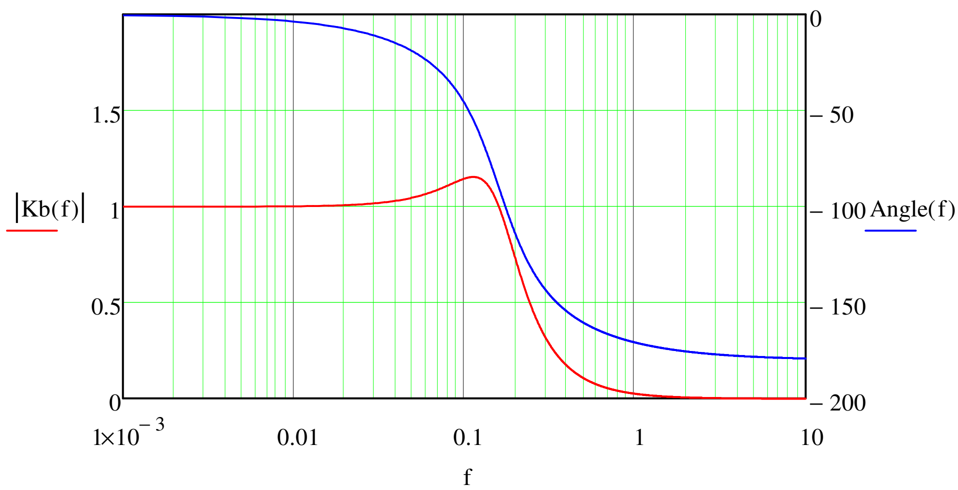
$$-\frac{i}{2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f - i + 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2\cdot i}$$

Simplifications

$$\frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f + i - 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2\cdot i} \qquad \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f + i\cdot\left(1 - 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2\right)}$$

$$Kb(f) := \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f + i\cdot\left(1 - 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2\right)} \qquad Angle(f) := \frac{180}{\pi}\cdot\arg(Kb(f))$$

$f := 0.001, 0.002 .. 10$ $\qquad R = 1 \qquad C = 1 \qquad L = 1$



$$0 = 1 - 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2$$

On cherche la fréquence qui va annuler la partie imaginaire du dénominateur. On résout pour f

$$f = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{C\cdot L}}{2\cdot\pi\cdot C\cdot L} \\ -\frac{\sqrt{C\cdot L}}{2\cdot\pi\cdot C\cdot L} \end{pmatrix}$$

On trouve la fréquence de résonnance:

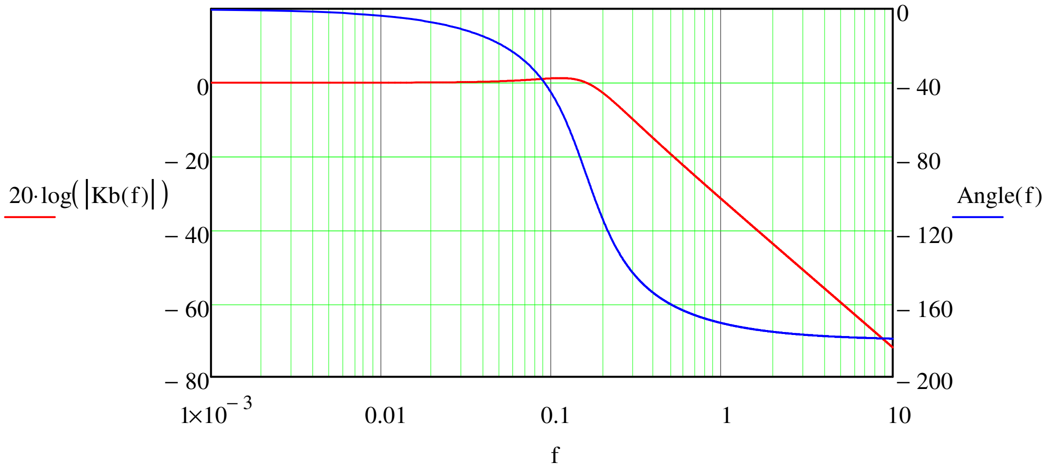
$$fr = \frac{\sqrt{C\cdot L}}{2\cdot\pi\cdot C\cdot L}\cdot\frac{\sqrt{L\cdot C}}{\sqrt{L\cdot C}} = \frac{L\cdot C}{2\cdot\pi\cdot C\cdot L\cdot\sqrt{L\cdot C}} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}$$

$$fr := \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}} = 0.159$$

Fréquence de résonnance

À la fréquence de résonnance on a -90 degrés de déphasage entre la sortie et l'entrée.

En dB:

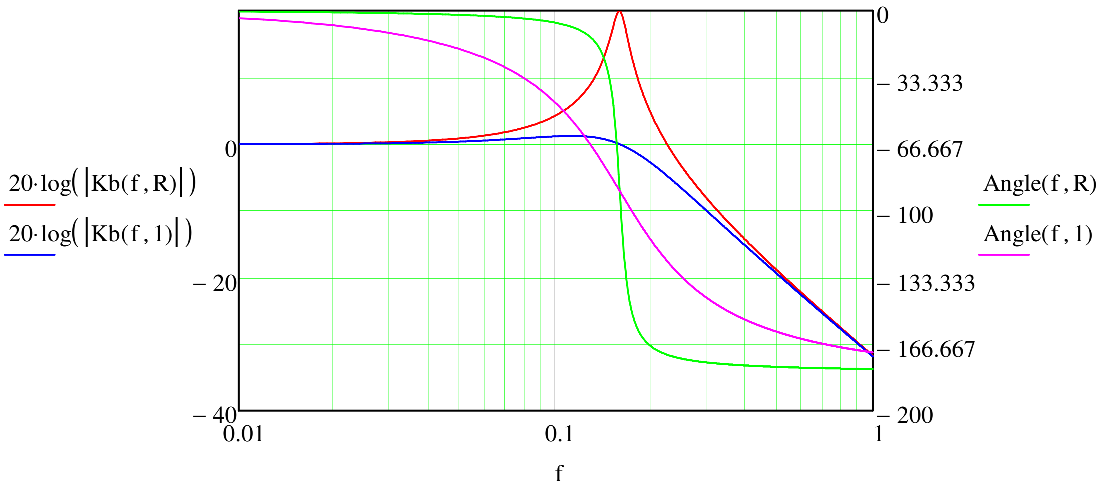


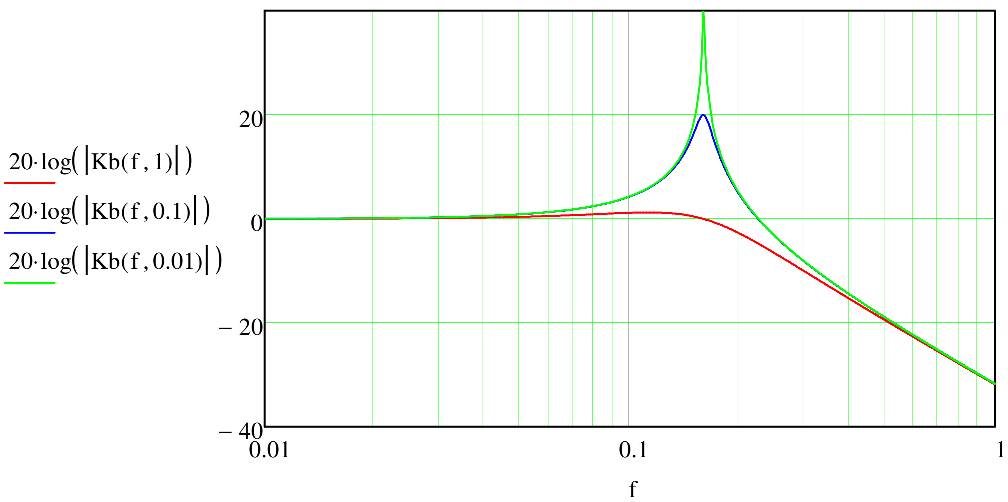
$$Kb(f,R) := \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f + i\cdot\left(1 - 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2\right)} \qquad Angle(f,R) := \frac{180}{\pi}\cdot \arg(Kb(f,R))$$

$R := 0.1$

$f := 0.01, 0.011 .. 1$

R contrôle l'amortissement





Amplitude de Kb = Kbmax à la fréquence de résonnance: fr
Alors le dénominateur de Kb est réel

$$fr = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}$$

$$Kbmax = \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f}$$

On substitue fr dans Kbmax:

$$Kbmax := -\frac{\sqrt{C\cdot L}\cdot i}{C\cdot R} \qquad R = 0.1 \qquad L = 1 \qquad C = 1$$

$$Kbmax1 := \left|-\frac{\sqrt{C\cdot L}\cdot i}{C\cdot R}\right| \qquad Kbmax1 = 10$$

Amplitude et angle de la fonction de transfert à la résonnance.

$$Angle := \frac{180}{\pi}\cdot \arg(Kbmax) = -90$$ Degrés

Facteur de qualité: Q = réactance / résistance

$$Q = \frac{Xc}{R} \qquad Q = \frac{\frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C}}{R} \qquad Q = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f} \qquad fr = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}$$

À la fréq. fr:

$$Q = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f} = \frac{\sqrt{C\cdot L}}{C\cdot R}$$

On trouve: $Q = \frac{\sqrt{C\cdot L}}{C\cdot R}$ Corresponds à l'amplitude de Kbmax

PENTES de Kh(f)

Pour 1 octave:

$F1 := 10 \qquad F2 := 2\cdot F1 \qquad 20\cdot\log(|Kb(F2,R)|) - 20\cdot\log(|Kb(F1,R)|) = -12.043$ dB/octave

Pour 1 décade:

$F2 := 10\cdot F1 \qquad 20\cdot\log(|Kb(F2,R)|) - 20\cdot\log(|Kb(F1,R)|) = -40$ dB/décade

****

Amplitude des fonctions de transfert en fonction de la fréq. de coupure

FILTRE PASSE BAS

$$K = \frac{i}{i - 2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f}$$

$$Ka = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{fo}\right)^2}}$$

Amplitude Ka en fonction de la fréq. de coupure $fo = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot R\cdot C}$

FILTRE PASSE HAUT

$$K = \frac{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L}{i\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L + R}$$

$$Kaph = \frac{\left(\frac{f}{fo}\right)}{\sqrt{\left(\frac{f}{fo}\right)^2 + 1}}$$

Amplitude en fonction de la fréq. de coupure $fo = \frac{R}{2\cdot\pi\cdot L}$

FILTRE PASSE-BAS / BANDE PASSANTE

$$Kbb(f) = \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f + i\cdot\left(1 - 4\cdot\pi^2\cdot C\cdot L\cdot f^2\right)}$$

Tel que démontré précédemment

$$Kbb(f) = \frac{i}{-2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f + i\cdot\left(1 - \frac{f^2}{fr^2}\right)}$$

$$Q = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f} \qquad 2\cdot\pi\cdot C\cdot R\cdot f = \frac{1}{Q}$$

$$Kbbb(f) = \frac{i}{\frac{-f}{fr\cdot Q} + i\cdot\left(1 - \frac{f^2}{fr^2}\right)}$$

$$Kbb(f) = \frac{1}{\sqrt{\frac{f^2}{fr^2\cdot Q^2} + \left(1 - \frac{f^2}{fr^2}\right)^2}}$$

Amplitude

FILTRE BANDE PASSANTE (SYMÉTRIQUE)

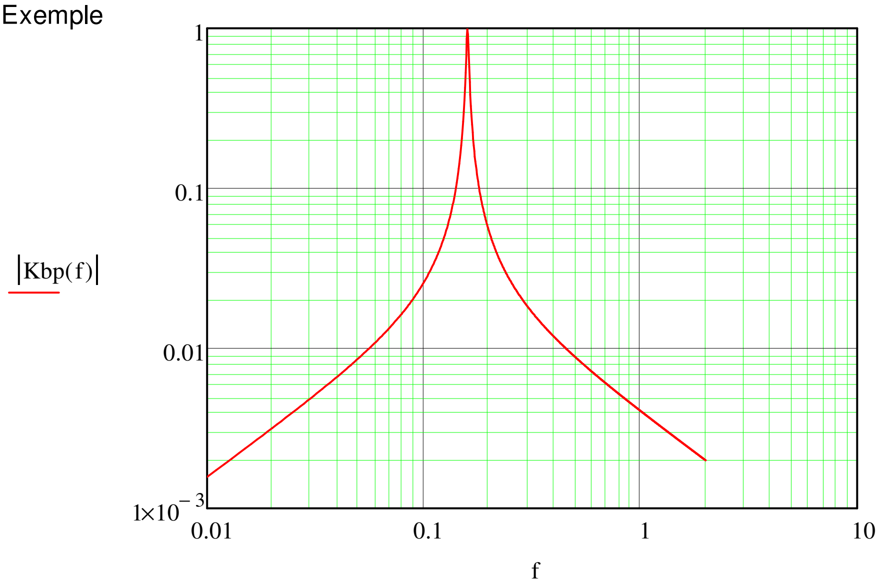
$$fo := \frac{1}{\left(2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}\right)} \qquad Q := 40 \qquad f := 0.01, 0.011 .. 2$$

$$Kbp(f) := \frac{1}{1 + i\cdot Q\cdot\left(\frac{f}{fo} - \frac{fo}{f}\right)}$$

$$Kbp1(f) := \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\cdot\left(\frac{f}{fo} - \frac{fo}{f}\right)^2}}$$

Amplitude en fonction de la fréq. de coupure

Exemple



PENTES de Kbp(f) En haut de la résonnance

Pour 1 octave:

$F1 := 10$ $\quad F2 := 2\cdot F1$ $\quad 20\cdot\log(|Kbp(F2)|) - 20\cdot\log(|Kbp(F1)|) = -6.022$ dB/octave

Pour 1 décade:

$F2 := 10\cdot F1$ $\quad 20\cdot\log(|Kbp(F2)|) - 20\cdot\log(|Kbp(F1)|) = -20$ dB/décade

PENTES de Kbp(f) En bas de la résonnance

Pour 1 octave:

$F1 := 0.001$ $\quad F2 := 2\cdot F1$ $\quad 20\cdot\log(|Kbp(F2)|) - 20\cdot\log(|Kbp(F1)|) = 6.022$ dB/octave

Pour 1 décade:

$F2 := 10\cdot F1$ $\quad 20\cdot\log(|Kbp(F2)|) - 20\cdot\log(|Kbp(F1)|) = 20.03$ dB/décade

Deux circuits qui donnent la <u>même courbe d'atténuation vs fréquence</u>. Phase en orange